***Теоретичні основи***

* 1. Загальні поняття

Для розв'язування задач у математиці досить часто доводиться складати рівняння. При цьому нерідко в ці рівняння, крім невідомих величин, входять також деякі інші змінні величини, що мають назву параметри.

**Означення.** Рівнянням з параметрами називають рівняння виду

= 0,

де шукане невідоме, змінні параметри.

Рівняння з параметрами можна розглядати як задачу відшукання всіх таких пар , що його задовольняють. Значення шуканого невідомого залежить від значення параметрів. Якщо змінній надати деякого фіксованого значення, то рівняння з параметром перетвориться у рівняння з однією змінною.

**Означення.** Допустимими значеннями параметрів називають такі значення , при яких вираз має зміст при деяких значеннях .

**Означення.** Областю зміни параметрів називають множину всіх допустимих систем значень параметрів рівняння = 0.

Під час розв'язування рівнянь з параметрами область зміни параметрів може бути заданою. Якщо межі зміни параметрів не зазначені, то вважаємо, що параметри набувають усіх своїх допустимих значень.

**Означення.** Розв'язати рівняння з параметрами – значить знайти всі розв'язки цього рівняння для кожної допустимої системи значень параметрів.

Рівняння з параметрами розв'язують, виходячи з особливостей функцій, що входять до них. Щоб розв'язати рівняння = 0 з невідомим і параметрами , треба:

* визначити область допустимих систем значень параметрів ;
* розв'язати рівняння відносно і подати невідоме у вигляді функції

= від параметрів;

* з'ясувати, при яких допустимих системах значень параметрів значення функції

= є розв'язками даного рівняння;

- розглянути рівняння = 0 при таких допустимих системах значень параметрів, при яких його не можна розв'язати відносно ; з'ясувати, чи має рівняння при цих значеннях параметрів розв'язки, і якщо має, то які.

**1.2.** Лінійні рівняння з параметрами

**Означення.** Рівняння виду = , де невідоме, , параметри, називають лінійним рівнянням з параметрами.

Наприклад, рівняння = 5, ( – 3) = –1, = + 2,

( + ) – = () + є лінійними рівняннями з параметрами , .

Якщо ≠ 0, то рівняння = має єдиний розв'язок: .

Якщо = 0, = 0, то рівняння = має вигляд: 0 · = 0, звідки будь-яке число.

Якщо = 0, ≠ 0, то рівняння = має вигляд: 0 · = , що неможливо. Значить рівняння не має розв'язків.

* 1. Системи лінійних рівнянь з двома невідомими та з параметрами

Якщо треба знайти спільні розв'язки двох рівнянь, розглядається система вигляду

де , невідомі; параметри.

Якщо , то система має єдиний розв'язок.

При цьому графіки рівнянь, що входять у систему, мають одну спільну точку, координати якої є розв'язком системи.

Якщо , то система не має розв'язку.

Графіки рівнянь при цьому є взаємно паралельними прямими.

Якщо , то система має безліч розв'язків.

Графіки рівнянь збігаються.

* 1. Квадратні рівняння з параметрами

**Означення.** Рівняння виду = 0, де шукане невідоме,

, параметри, ≠ 0, називають квадратним рівнянням з параметрами.

Наприклад, рівняння + ( + 1) + = 0 є квадратним рівнянням з параметром .

Якщо = 0, то рівняння перетворюється на лінійне і набирає вигляду:

= .

Корені квадратного рівняння знаходимо за формулою:

, де =.

Для коренів і квадратного рівняння виконується теорема Вієта:

+ = , · = .

Якщо ≠ 0 і > 0, то рівняння має 2 дійсні корені.

Якщо ≠ 0 і = 0, то рівняння має єдиний корінь:

(іноді кажуть: два однакові корені).

Якщо ≠ 0 і < 0, то рівняння не має дійсних коренів.

* 1. Дробово-раціональні рівняння з параметрами

**Означення.** Рівняння виду = 0, де та многочлени, називається дробово-раціональним.

Множина допустимих значень цього рівняння визначається умовою: ≠ 0.

Наприклад, рівняння = є дробово-раціональним рівнянням з параметром .