***Теоретичні основи***

* 1. Загальні поняття

 Для розв'язування задач у математиці досить часто доводиться складати рівняння. При цьому нерідко в ці рівняння, крім невідомих величин, входять також деякі інші змінні величини, що мають назву параметри.

 **Означення.** Рівнянням з параметрами називають рівняння виду

$f\left(x, a\_{1}, a\_{2}, …, a\_{n}\right)$ = 0,

де $x-$ шукане невідоме, $a\_{1}, a\_{2}, …, a\_{n}-$ змінні параметри.

 Рівняння з параметрами можна розглядати як задачу відшукання всіх таких пар $\left(x; a\right)$, що його задовольняють. Значення шуканого невідомого $x$ залежить від значення параметрів. Якщо змінній $a$ надати деякого фіксованого значення, то рівняння з параметром перетвориться у рівняння з однією змінною.

 **Означення.** Допустимими значеннями параметрів називають такі значення $a\_{1}, a\_{2}, …, a\_{n}$ , при яких вираз $f\left(x, a\_{1}, a\_{2}, …, a\_{n}\right)$ має зміст при деяких значеннях $x$.

 **Означення.** Областю зміни параметрів називають множину всіх допустимих систем значень параметрів рівняння $ f\left(x, a\_{1}, a\_{2}, …, a\_{n}\right)$ = 0.

 Під час розв'язування рівнянь з параметрами область зміни параметрів може бути заданою. Якщо межі зміни параметрів не зазначені, то вважаємо, що параметри набувають усіх своїх допустимих значень.

 **Означення.** Розв'язати рівняння з параметрами – значить знайти всі розв'язки цього рівняння для кожної допустимої системи значень параметрів.

 Рівняння з параметрами розв'язують, виходячи з особливостей функцій, що входять до них. Щоб розв'язати рівняння $f\left(x, a\_{1}, a\_{2}, …, a\_{n}\right)$ = 0 з невідомим $x$ і параметрами $ a\_{1}, a\_{2}, …, a\_{n}$, треба:

* визначити область допустимих систем значень параметрів $ a\_{1}, a\_{2}, …, a\_{n}$;
* розв'язати рівняння відносно $x$ і подати невідоме $x$ у вигляді функції

 $x$ = $φ( a\_{1}, a\_{2}, …, a\_{n})$ від параметрів;

* з'ясувати, при яких допустимих системах значень параметрів значення функції

$x$ = $φ( a\_{1}, a\_{2}, …, a\_{n})$ є розв'язками даного рівняння;

- розглянути рівняння $f\left(x, a\_{1}, a\_{2}, …, a\_{n}\right)$ = 0 при таких допустимих системах значень параметрів, при яких його не можна розв'язати відносно $x$; з'ясувати, чи має рівняння при цих значеннях параметрів розв'язки, і якщо має, то які.

 **1.2.** Лінійні рівняння з параметрами

 **Означення.** Рівняння виду $ax$ = $b$ , де $x-$ невідоме, $a$,$ b-$ параметри, називають лінійним рівнянням з параметрами.

 Наприклад, рівняння $ax$ = 5, ($a$ – 3)$ x$ = –1, $ ax$ = $a$ + 2,

($a$ + $x$)$b$ – $a$ = ($b+1$)$x$ + $ab$ є лінійними рівняннями з параметрами $a$ ,$ b$ .

 Якщо $a$ ≠ 0, то рівняння $ax$ = $b$ має єдиний розв'язок: $x=\frac{b}{a}$ .

 Якщо $a$ = 0, $b$ = 0, то рівняння $ax$ = $b$ має вигляд: 0 · $x$ = 0, звідки $x-$ будь-яке число.

 Якщо $a$ = 0, $b$ ≠ 0, то рівняння $ax$ = $b $ має вигляд: 0 · $x$ = $b$, що неможливо. Значить рівняння не має розв'язків.

* 1. Системи лінійних рівнянь з двома невідомими та з параметрами

Якщо треба знайти спільні розв'язки двох рівнянь, розглядається система вигляду

$\left\{\begin{array}{c}a\_{1}x+ b\_{1}y=c\_{1}\\a\_{2}x+b\_{2}y=c\_{2}\end{array}\right.$

де $x$, $y-$ невідомі; $a\_{1}, a\_{2 }, b\_{1}, b\_{2 }, c\_{1 }, c\_{2}-$ параметри.

 Якщо $\frac{a\_{1}}{a\_{2}} \ne \frac{b\_{1}}{b\_{2}}$ , то система має єдиний розв'язок.

 При цьому графіки рівнянь, що входять у систему, мають одну спільну точку, координати якої є розв'язком системи.

 Якщо $\frac{a\_{1}}{a\_{2}} = \frac{b\_{1}}{b\_{2}}\ne \frac{c\_{1}}{c\_{2}}$ , то система не має розв'язку.

 Графіки рівнянь при цьому є взаємно паралельними прямими.

 Якщо $\frac{a\_{1}}{a\_{2}} = \frac{b\_{1}}{b\_{2}}=\frac{c\_{1}}{c\_{2}}$ , то система має безліч розв'язків.

 Графіки рівнянь збігаються.

* 1. Квадратні рівняння з параметрами

 **Означення.** Рівняння виду $ax^{2}+bx+ c$ = 0, де $x-$ шукане невідоме,

 $a$, $b,c-$ параметри, $a$ ≠ 0, називають квадратним рівнянням з параметрами.

 Наприклад, рівняння $x^{2}$ + ($m$ + 1)$ x$ + $m$ = 0 є квадратним рівнянням з параметром $m$.

 Якщо $a$ = 0, то рівняння перетворюється на лінійне і набирає вигляду:

$ax$ = $b$.

 Корені квадратного рівняння знаходимо за формулою:

$x=\frac{-b\pm \sqrt{D}}{2a}$, де $D $=$ b^{2}-4ac$.

 Для коренів $x\_{1}$ і $x\_{2}$ квадратного рівняння виконується теорема Вієта:

$x\_{1}$ + $x\_{2}$ = $– \frac{b}{a}$ , $x\_{1}$ · $x\_{2}$ = $\frac{c}{a}$ .

 Якщо $a$ ≠ 0 і $D $> 0, то рівняння має 2 дійсні корені.

 Якщо $a$ ≠ 0 і $D $= 0, то рівняння має єдиний корінь:

$x= – \frac{b}{2a}$ (іноді кажуть: два однакові корені).

 Якщо $a$ ≠ 0 і $D $< 0, то рівняння не має дійсних коренів.

* 1. Дробово-раціональні рівняння з параметрами

 **Означення.** Рівняння виду $\frac{P(x)}{Q(x)}$ = 0, де $P(x)$ та $Q\left(x\right)-$ многочлени, називається дробово-раціональним.

 Множина допустимих значень цього рівняння визначається умовою: $Q\left(x\right) $≠ 0.

 Наприклад, рівняння $\frac{10}{2x-a}$ = $\frac{3}{ax-5}$ є дробово-раціональним рівнянням з параметром $a$.